Integration von Produkten – Partielle Integration

Einleitung: Mit der Produktregel, kann man z.B. folgende Funktion ableiten: f(x) = sin(x) · 2x. Wie aber findet man eine Stammfunktion bzw. das Integral zu dieser Funktion?

Herleitung:

Sei f = u · v. Dann gilt mit der Produktregel für die Ableitung. (u · v)´(x) = u´(x) · v(x) + u(x) · v´(x)

Integration der beiden Seiten: $\int_a^b (u \cdot v)'(x)\,dx = \int_a^b ((u'(x) \cdot v(x))\,dx + \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$.

Wegen $\int_a^b (u \cdot v)'(x)\,dx = [(u \cdot v)(x)]_a^b$ ergibt sich: $\int_a^b (u'(x) \cdot v(x))\,dx = [(u \cdot v)(x)]_a^b - \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$

we

Satz: Die Formel $\int_a^b (u'(x) \cdot v(x))\,dx = [(u \cdot v)(x)]_a^b - \int_a^b (u(x) \cdot v'(x))\,dx$ kann zur Berechnung von Integralen der Form

$\int_a^b g(x) \cdot h(x)\,dx$ benutzt werden. Dazu müssen die Faktoren g(x) und h(x) jeweils einem der Faktoren u´(x) und v´(x) zugeordnet werden.

Anmerkung: Man sagt partielle Integration, weil die Integration von u´ · v nur dann ausgeführt werden kann, wenn die Integration von u · v´ ausgeführt werden kann.

Vereinfachte Schreibweise der Produktintegration:

$$\int_a^b u' \cdot v = [(u \cdot v)]_a^b - \int_a^b u \cdot v'$$

Beispiel: $\int_0^\pi 3x \cdot \sin(x)$

u(x) = ________________ => u´(x) = ________________

v(x) = 3x => v´(x) = ________________

Eingesetzt in $\int_a^b u' \cdot v = [(u \cdot v)]_a^b - \int_a^b u \cdot v'(x)$

Nehmen wir nun folgende Zuordnung:

u(x) = => u´(x) = 3x

v(x) = => v´(x) = ________________

Erkenntnis:

Aufgaben	Rechenweg	Lösung
$\int_{0}^{1} 3x \cdot e^{2x}\, dx$		$\frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{4}$
$\int_{0}^{0,5} 4x \cdot e^{2x+2}\, dx$		e^2
$\int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(x) dx$		-2
$\int_{0}^{2\pi} x \cdot \sin(2x)\, dx$		$-\pi$
$\int_{0}^{2} x^2 \cdot e^x dx$ Tipp: Zweimal anwenden		$2(e^2-1)$

Integration von Produkten – Partielle Integration

Einleitung: Mit der Produktregel, kann man z.B. folgende Funktion ableiten: f(x) = sin(x) · 2x. Wie aber findet man eine Stammfunktion bzw. das Integral zu dieser Funktion?

Herleitung:

Sei f = u · v. Dann gilt mit der Produktregel für die Ableitung. (u · v)´(x) = u´(x) · v(x) + u(x) · v´(x)

Integration der beiden Seiten: $\int_a^b (u\cdot v)'(x)\,dx = \int_a^b ((u'(x)\cdot v(x))\,dx + \int_a^b (u(x)\cdot v'(x))\,dx$.

Wegen $\int_a^b (u\cdot v)'(x)\,dx = [(u\cdot v)(x)]_a^b$ ergibt sich: $\int_a^b (u'(x)\cdot v(x))\,dx = [(u\cdot v)(x)]_a^b - \int_a^b (u(x)\cdot v'(x))\,dx$

we

Satz: Die Formel $\int_a^b (u'(x)\cdot v(x))\,dx = [(u\cdot v)(x)]_a^b - \int_a^b (u(x)\cdot v'(x))\,dx$ kann zur Berechnung von Integralen der Form

$\int_a^b g(x)\cdot h(x)\,dx$ benutzt werden. Dazu müssen die Faktoren g(x) und h(x) jeweils einem der Faktoren u´(x) und v´(x) zugeordnet werden.

Anmerkung: Man sagt partielle Integration, weil die Integration von u´ · v nur dann ausgeführt werden kann, wenn die Integration von u · v´ ausgeführt werden kann.

Vereinfachte Schreibweise der Produktintegration:

$$\int_a^b u'\cdot v = [(u\cdot v)]_a^b - \int_a^b u\cdot v'$$

Beispiel: $\int_0^\pi 3x\cdot\sin(x)$

u(x) = -cos(x) => u´(x) = sin(x)

v(x) = 3x => v´(x) = 3

Eingesetzt in $\int_a^b u'\cdot v = [(u\cdot v)]_a^b - \int_a^b u\cdot v'(x)$

$\int_0^\pi \sin(x)\ \cdot 3x = [(3x\cdot(-\cos(x))]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\ \cdot 3$

$= [(3x\cdot(-\cos(x))]_0^\pi - 3\ \cdot \int_0^\pi -\cos(x)$

$= [(3x\cdot(-\cos(x))]_0^\pi + 3\ \cdot \int_0^\pi \cos(x)$

$= [3x\cdot(-\cos(x))]_0^\pi + 3\cdot[sin(x)]_0^\pi$

$= 3\pi\ \cdot(-\cos(\pi)) - 3\cdot 0\ \cdot(-\cos(0)) + 3\cdot(\sin(\pi) - \sin(0))$

$= 3\pi\ \cdot(+1) = 3\pi$

Nehmen wir nun folgende Zuordnung:

u(x) = => u´(x) = 3x

v(x) = => v´(x) = ________________

Erkenntnis:

Aufgaben	Rechenweg
$\int_0^1 3x \cdot e^{2x}\, dx$	u(x) = $\frac{1}{2}$ e^{2x} u´(x) = e^{2x} v(x) = 3x v´(x) = 3 Eingesetzt in $\int_a^b u' \cdot v = [(u \cdot v)]_a^b - \int_a^b u \cdot v'(x)$ $\int_0^1 3x \cdot e^{2x}\, dx$ $= [3x \cdot \frac{1}{2} e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 3 \cdot \frac{1}{2} e^{2x}\, dx$ $= [3 \cdot \frac{1}{2} e^2 - 0 \cdot \frac{1}{2} e^0] - 3[\frac{1}{4} e^{2x}]_0^1$ $= [3 \cdot \frac{1}{2} e^2 - 0 \cdot \frac{1}{2} e^0] - 3[\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^0]$ $= [3 \cdot \frac{1}{2} e^2] - 3[\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4}]$ $= [\frac{6}{4} e^2] - [\frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4}]$ $= \frac{3}{4} e^2 + \frac{3}{4}$
$\int_0^{0,5} e^{2x+2} \cdot 4x\, dx$	u(x) = $\frac{1}{2}$ e^{2x+2} u´(x) = e^{2x+2} v(x) = 4x v´(x) = 4 Eingesetzt in $\int_a^b u' \cdot v = [(u \cdot v)]_a^b - \int_a^b u \cdot v'(x)$ $\int_0^{0,5} e^{2x+2} \cdot 4x = \left[\frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4x\right]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} \frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4$ $= \left[\frac{1}{2} e^{2x+2} \cdot 4x\right]_0^{0,5} - 2 \cdot \int_0^{0,5} e^{2x+2}$ $= \left[\left(\frac{1}{2} e^3 \cdot 2\right) - \left(\frac{1}{2} e^2 \cdot 0\right)\right] - 2\left[\frac{1}{2} e^{2x+2}\right]_0^{0,5}$ $= e^3 - 2(\frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{2} e^2)$ $= e^3 - e^3 + e^2$ $= e^2$

<table>
<tr>
<td>$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x) dx$</td>
<td>u(x)= sin(x) u‘(x)= cos(x)
v(x)= x v‘(x) = 1
Eingesetzt in $\int_a^b u' \cdot v = [(u \cdot v)]_a^b - \int_a^b u \cdot v'(x)$

$\int_0^{\pi} \cos(x) \cdot x = [(x \cdot \sin(x))]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(x)$

$= [(x \cdot \sin(x))]_0^{\pi} - 1 \int_0^{\pi} \sin(x)$
$= [(x \cdot \sin(x))]_0^{\pi} - [-\cos(x)]_0^{\pi}$
$= (\pi \cdot \sin(\pi) - 0 \cdot \sin(0)) - [-\cos(\pi) - (-\cos(0))]$
$= (\pi \cdot \sin(\pi) - 0 \cdot \sin(0)) - [-\cos(\pi) + \cos(0)]$
$= (\pi \cdot \sin(\pi) - 0 \cdot \sin(0)) + \cos(\pi) - \cos(0)$
$= (\pi \cdot 0 - 0 \cdot 0) + (-1) - 1$
$= (0 - 0) - 1 - 1$
$= 0 - 2$
$= -2$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin(2x)\, dx$</td>
<td>u(x)= $-\frac{1}{2}\cos(2x)$ u‘(x) = $\sin(2x)$

v (x)= x v‘(x) = 1

Eingesetzt in $\int_a^b u' \cdot v = [(u \cdot v)]_a^b - \int_a^b u \cdot v'(x)$

$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin(2x) = \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right) dx$

$= \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{2\pi} - 1 \cdot \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx$

$= \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{2\pi} + 1 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(2x)) dx$

$= \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(2x)) dx$

$= \left[2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2 \cdot 2\pi)\right) - 0\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2x))\right]_0^{2\pi}$

$= \left[2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2 \cdot 2\pi)\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} \cdot (-\sin(2 \cdot 2\pi)) - 0\right]$

$= [-\pi \cdot \cos(4\pi)] + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} \cdot \sin(4\pi)\right]$

$= [-\pi \cdot 1] - \frac{1}{4}[0] = -\pi - 0 = -\pi$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\int_0^{2} x^2 \cdot e^x dx$
Tipp:
Zweimal
anwenden</td>
<td>u(x) = e^x => u´(x) = e^x
v(x) = x^2 => v´(x) = $2x$
$\int_0^2 x^2 \cdot e^x dx = [x^2 \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 2x \cdot e^x dx$
$(e^2 \cdot 2^2 - e^0 \cdot 0^2) - ([2x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 2 \cdot e^x dx)$
$= (4e^2 - 0) - \left([2x \cdot e^x]_0^2 - 2\int_0^2 e^x dx\right)$
$= 4e^2 - ([2x \cdot e^x]_0^2 - 2[e^x]_0^2)$
$= 4e^2 - ([4 \cdot e^2 - 0] - 2[e^2 - e^0])$
$= 4e^2 - (4e^2 - 2[e^2 - 1])$
$= 4e^2 - (4e^2 - (2e^2 - 2])$
$= 4e^2 - 4e^2 + (2e^2 - 2) =$
$= 2e^2 - 2$</td>
</tr>
</table>

1 a) $h(x) = x$; $g'(x) = e^x$;

$$\int_{-1}^{1} x\,e^x dx = [x \cdot e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx = e + \tfrac{1}{e} - [e^x]_{-1}^{1}$$

$$= e + \tfrac{1}{e} - \left[e - \tfrac{1}{e}\right] = \tfrac{2}{e} \approx 0{,}736$$

b) $h(x) = 5x$; $g'(x) = e^x$;

$$\int_0^2 5x\,e^x dx = [5x \cdot e^x]_0^2 - \int_0^2 5\,e^x dx$$

$$= 10\,e^2 - [5\,e^x]_0^2 = 10\,e^2 - [5\,e^2 - 5]$$

$$= 5\,e^2 + 5$$

$$\approx 41{,}945$$

c) $h(x) = x$; $g'(x) = e^{2x}$;

$$\int_0^1 x\,e^{2x} dx = \left[x \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \tfrac{1}{2} e^{2x} dx$$

$$= \tfrac{1}{2} e^2 - \left[\tfrac{1}{4} e^{2x}\right]_0^1 = \tfrac{1}{4} e^2 + \tfrac{1}{4} \approx 2{,}097$$

d) $h(x) = 4x$; $g'(x) = e^{2x+2}$;

$$\int_0^{0,5} 4x\,e^{2x+2} dx = \left[4x \cdot \tfrac{1}{2} e^{2x+2}\right]_0^{0,5} - \int_0^{0,5} 2\,e^{2x+2} dx$$

$$= e^3 - [e^{2x+2}]_0^{0,5} = e^2 \approx 7{,}389$$

2 a) $h(x) = x$; $g'(x) = \sin(x)$;

$$\int_0^{\pi} x \cdot \sin(x)\,dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)\,dx$$

$$= \pi - [-\sin(x)]_0^{\pi} = \pi$$

b) $h(x) = x$; $g'(x) = \cos(x)$;

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$$

$$= -[-\cos(x)]_0^{\pi} = -2$$

c) $h(x) = x$; $g'(x) = \sin(2x)$;

$$\int_0^{2\pi} x \cdot \sin(2x)\,dx$$

$$= \left[-\tfrac{1}{2} x\cos(2x)\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2}\cos(2x)\,dx$$

$$= -\pi - \left[-\tfrac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{2\pi} = -\pi$$